UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso **2010-2011**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix},$$

a) (1 punto) Calcular el rango de A en función de los valores de a.

b) (1 punto) En el caso $a = 2$, discutir el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b, y resolverlo cuando sea posible.

c) (1 punto) En el caso $a = 1$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

a) (1'5 puntos) Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas
$$r_1 \equiv x = y = z\,, \qquad r_2 \equiv \begin{cases} y = 0\,, \\ z = 0\,, \end{cases} \qquad r_3 \equiv \begin{cases} x = 0\,, \\ z = 0\,, \end{cases}$$
con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

b) (1'5 puntos) Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas
$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}\,, \qquad r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}\,.$$

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.

a) (1 punto) Calcular la integral $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx$.

b) (1 punto) Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

a) (1 punto) Calcular el siguiente límite:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,.$$

b) (1 punto) Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a, obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) (1 punto) Obtener las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.

c) (1 punto) Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

Ejercicio 2 . Calificación máxima: 3 puntos.

a) (2 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix},$$

según los valores de m.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1\,, \qquad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1\,,$$

se pide:

a) (0'5 puntos) Estudiar su posición relativa.

b) (1'5 puntos) En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2 puntos.

a) (0'75 puntos) Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

b) (0'75 puntos) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(-2, 1, 1)$.

c) (0'5 puntos) Hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P.