

## MATEMÁTICAS II

### INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

**INSTRUCCIONES:** El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

**PUNTUACIÓN:** La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

**TIEMPO:** 1 hora y 30 minutos.

### OPCIÓN A

**Ejercicio 1.** Calificación máxima: 2 puntos. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

**Ejercicio 2.** Calificación máxima: 2 puntos.

Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función  $f(x)$ .

b) (1 punto) Calcular:  $\int_0^1 f(x)dx$

**Ejercicio 3.** Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema

$$\begin{cases} (1-a)x - 2y + 4z = 0 \\ x - (1+a)y + z = 0 \\ -x + ay - z = 0 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Estudiar la compatibilidad según los valores del parámetro  $a$ .

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

**Ejercicio 4.** Calificación máxima: 3 puntos.

Se consideran la recta y los planos siguientes

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}; \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0; \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

Se pide:

## MATEMÁTICAS II

- a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.  
 b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.  
 c) (1 punto) Calcular la distancia de  $r$  a  $\pi_2$ .

### OPCIÓN B

**Ejercicio 1.** Calificación máxima: 2 puntos. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar  $A^{-1}$ .  
 b) (1 punto) Hallar la matriz  $X$ , tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde  $A^T$  significa la matriz traspuesta de  $A$ ).

**Ejercicio 2.** Calificación máxima: 2 puntos.

- a) (1 punto) Dado el sistema  $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ , escribir una tercera ecuación de la forma  $\alpha x + \beta y = c$

(distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

- b) (1 punto) Dado el sistema  $\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$ , escribir una tercera ecuación de la forma

$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$  (distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

**Ejercicio 3.** Calificación máxima: 3 puntos.

- a) (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro  $k$ :

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y + kz = 3$$

$$\pi_2 \equiv x + ky - z = -1$$

$$\pi_3 \equiv 3x + y - 3z = -k$$

**MATEMÁTICAS II**

---

**b)** (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

**Ejercicio 4.** Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función  $f(x) = 1 - x^2$ , se pide:

**a)** (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $P(a, f(a))$ , donde  $0 < a < 1$ .

**b)** (1 punto) Hallar los puntos  $A$  y  $B$  en los que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

**c)** (1 punto) Determinar el valor de  $a \in (0, 1)$  para el cual la distancia entre el punto  $A$  y el punto  $P(a, f(a))$  es el doble de la distancia entre el punto  $B$  y el punto  $P(a, f(a))$ .