

MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

TIEMPO: 1 hora y 30 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular los siguientes límites (donde “ln” significa Logaritmo Neperiano).

a) (1 punto)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$$

b) (1 punto)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f . Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

b) (1 punto) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos. Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m .

MATEMÁTICAS II

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas en el espacio:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

- a) (1,5 puntos) Hallar la distancia entre las dos rectas.
b) (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (1 punto) Dibujarla gráfica de la función $g(x) = e^x - x$.

b) (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow -\infty$.

c) (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano

$$\pi \equiv x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .
- b) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π , π' .