UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
2013/2014

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1}.
b) (1 punto) Hallar la matriz A^{-1} para $k = 6$.
c) (1,5 puntos) Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para $k = 6$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + ay + z = 0, \qquad \pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0, \qquad \pi_3 \equiv x + y - z = 0,$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular los valores de a para los que los planos se cortan en una recta.
b) (1 punto) Para $a = 2$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta intersección de los planos π_1 y π_2.
c) (1 punto) Hallar el punto P' proyección de P sobre el plano π_3.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Calcular los siguientes límites:

$$a)\ (1\text{ punto}) \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}, \qquad b)\ (1\text{ punto}) \quad \lim_{x \longrightarrow 0} [1 - \operatorname{sen} x]^{1/x}.$$

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

a) (1 punto) Sea $g(x)$ una función derivable que cumple $g(6) = \int_5^6 g(x)\, dx$. Hallar

$$\int_5^6 (x - 5)\, g'(x)\, dx.$$

b) (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua que verifica $\int_1^e f(u)\, du = 1/2$. Hallar

$$\int_0^2 f(e^{x/2})\, e^{x/2}\, dx.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6}{x-1}\,, & \text{si } x < 0\,, \\[2ex] \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\,, & \text{si } x \geq 0\,, \end{cases}$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar su continuidad.

b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.

c) (1,25 puntos) Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

Ejercicio 2 . Calificación máxima: 3 puntos.

a) (1 punto) Determinar si se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre la rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda\,, \\ y = -6 + 2\lambda\,, \\ z = 1 + \lambda\,, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0\,, \\ 2x + z - 6 = 0\,. \end{cases}$$

b) (2 puntos) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular común a las dos rectas anteriores.

Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (a+2)x & + & (a+1)y & = & -6\,, \\ x & + & 5y & = & a\,, \\ x & + & y & = & -5\,, \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0,5 puntos) Resolverlo cuando sea posible.

Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2 puntos.

Sabiendo que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

es igual a 1, calcular el valor de los determinantes:

$$\text{a) (1 punto)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}, \qquad \text{b) (1 punto)} \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.
a) Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
c) Planteamiento, 0,75 puntos. Resolución, 0,75 puntos.

Ejercicio 2.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
c) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 3.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 4.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.
a) Por el dominio, 0,25 puntos y por la continuidad 0,5 puntos repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.
b) Por cada asíntota 0,5 puntos repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.
c) Por el cálculo correcto de la derivada 0,25 puntos. Por el estudio de los extremos relativos 0,5 puntos repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos. Por el esbozo de la gráfica 0,5 puntos.

Ejercicio 2.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 1 punto. Resolución, 1 punto.

Ejercicio 3.
a) Por la obtención del valor crítico $a = -1$: 0,5 puntos. Por la discusión de cada uno de los dos casos $[a = -1]$, $[a \neq -1]$: 0,5 puntos repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.
b) Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.

Ejercicio 4.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Soluciones
Opción A

Ejercicio 1

(a) Para todo valor de k, $\det(A) = 1$, por tanto la matriz A tiene inversa para cualquier valor de k.

(b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$X = I + A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

(a) Se estudia el rango de la matriz de coeficientes.

$$\begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 10 = (a+5)(a-2)$$

Para $a = -5$ y para $a = 2$ el rango de la matriz es 2, por tanto, para estos valores los tres planos se cortan en una recta.

(b) Para $a = 2$ los planos π_1 y π_2 se cortan en la recta $\{x = -3\lambda;\ y = 4\lambda;\ z = \lambda\}$. La ecuación del plano pedido es: $-3(x-1) + 4(y-1) + (z-1) = 0$ (es decir, $-3x + 4y + z - 2 = 0$).

(c) Recta por P' perpendicular al plano: $\{x = 1 + \lambda;\ y = 1 + \lambda;\ z = 1 - \lambda\}$.

Para obtener la intersección con el plano π_3: $(1+\lambda) + (1+\lambda) - (1-\lambda) = 0$; por tanto $\lambda = -\frac{1}{3}$.

El punto buscado es: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

Ejercicio 3

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

(b)

Si $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1 - \operatorname{sen} x)^{1/x} = L$ entonces $\displaystyle\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - \operatorname{sen} x)}{x} = -1.$ Por tanto $L = e^{-1}$.

Ejercicio 4.

(a) Integrando por partes

$$\int_5^6 (x-5)g'(x)dx = \Big[(x-5)g(x)\Big]_{x=5}^{x=6} - \int_5^6 g(x)dx = g(6) - \int_5^6 g(x)dx = 0.$$

(b) Por medio del cambio de variable $u = e^{x/2}$ $(du = \frac{1}{2}e^{x/2}dx))$,

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2}dx = 2\int_1^e f(u)du = 1.$$

Opción B

Ejercicio 1

(a)

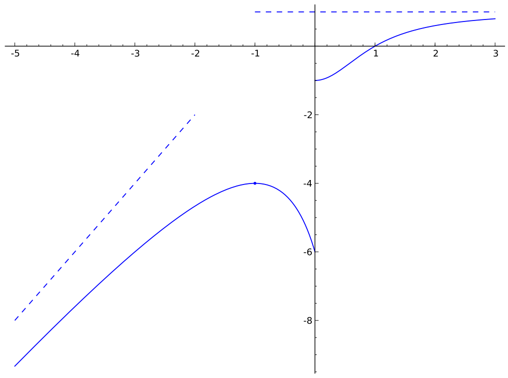
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+6}{x-1} = -6, \quad f(0) = -1. \qquad \text{Por tanto, no es continua en } x = 0.$$

La función es continua en cualquier otro punto, ya que es cociente de polinomios (funciones continuas) y nunca se anula el denominador.

(b) No hay asíntotas verticales. Asíntota horizontal: $y = 1$ (solamente cuando $x \to -\infty$). Asíntota oblicua: $y = 2x + 2$ (solamente cuando $x \to +\infty$).

(c)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-4x-6}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0; \\[2ex] \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$



La derivada $f'(x)$ solamente se anula en $x = -1$, punto en el que hay un máximo relativo de valor $f(-1) = -4$.

Ejercicio 2

(a) Dado que las rectas **no se cortan**, no se puede construir el triángulo.

(b) Vector normal a ambas rectas: $\vec{v} = (-1, 1, -1)$. Plano que contiene a r y a $\vec{v}$: $x - z = -3$. Plano que contiene a s y a $\vec{v}$: $x + y = 4$. Perpendicular común: $\{x = \lambda;\ y = 4 - \lambda;\ z = 3 + \lambda\}$.

Ejercicio 3

(a) Se estudian los rangos de los menores

$$\begin{vmatrix} a+2 & a+1 & -6 \\ 1 & 5 & a \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -21a - 21\,; \quad \text{El determinante se anula solamente para } a = -1.$$

$$\text{Dado que } \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{tenemos que} \begin{cases} \text{si } a = -1 & \text{sistema compatible determinado;} \\ \text{si } a \neq -1 & \text{sistema incompatible.} \end{cases}$$

(b) Para $a = -1$ la solución es $x = -6$, $y = 1$.

Ejercicio 4.

(a) Se usan las propiedades de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

(b) Se usan las propiedades de los determinantes (no se escriben los determinantes con filas o columnas proporcionales),

$$\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2$$

DOCUMENTO DE
Principales contenidos que se tendrán en cuenta en la elaboración de las Pruebas de Acceso a las Enseñanzas universitarias de Grado

Matemáticas II. Curso 2013/2014

De acuerdo con el Decreto 67/2008, de 19 de junio, por el que se establece el currículo del Bachillerato para la Comunidad de Madrid, publicado en el B.O.C.M. con fecha 27 de junio de 2008, para elaborar las Pruebas de Acceso a la Universidad se tendrán en cuenta los siguientes contenidos:

ANÁLISIS.

- Límite de una función en un punto. Límites laterales. Cálculo de límites. Indeterminaciones sencillas. Infinitésimos equivalentes.
- Funciones continuas. Operaciones algebraicas con funciones continuas. Composición de funciones continuas. Teorema de los valores intermedios. Teorema de acotación en intervalos cerrados y acotados. Tipos de discontinuidad.
- Derivada de una función en un punto. Interpretaciones (analítica, geométrica, física). Derivadas laterales. Relación con la continuidad. Reglas de derivación (incluyendo la regla de la cadena, la derivación logarítmica, y las fórmulas de las derivadas de las funciones arcoseno y arcotangente). Derivadas iteradas.
- Aplicaciones de la derivada. Monotonía y convexidad. Determinación de los puntos notables de funciones. Representación gráfica.
- Planteamiento y resolución de problemas de máximos y mínimos.
- Conocimiento y aplicación de los resultados del Teorema de Rolle, el Teorema del Valor Medio y la regla de L'Hôpital.
- Primitiva de una función. Cálculo de primitivas inmediatas y de funciones que son derivadas de una función compuesta. Integración por partes. Integración mediante cambio de variables (ejemplos simples). Integración de funciones racionales (con denominador de grado no mayor que dos).
- El problema del área. Introducción al concepto de integral definida de una función a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. La regla de Barrow. La integral definida como suma de elementos diferenciales: Aplicaciones al cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución.

ÁLGEBRA LINEAL.

- Las matrices como herramientas para representar datos estructurados en tablas y grafos. Traspuesta de una matriz. Suma de matrices. Producto de un número real por una matriz. Producto de matrices. Potencias de una matriz cuadrada. Propiedades de las operaciones con matrices. *(Se pretende que el estudiante sea capaz de realizar con corrección manipulaciones algebraicas con matrices, aunque no se exigirá la demostración de las propiedades).*
- Determinantes. Definición y propiedades. Cálculo de determinantes de orden dos y tres, utilizando la regla de Sarrus. Propiedades elementales de los determinantes. Aplicación al desarrollo de determinantes de orden superior. *(No se exigirá la demostración de las propiedades).*
- Matrices inversas. Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada de orden no superior a tres. Estudio de la inversa de una matriz dependiente de un parámetro. Ecuaciones matriciales.
- Rango de una matriz. Estudio del rango de una matriz que depende como máximo de un parámetro.
- Sistemas de ecuaciones lineales. Representación en forma matricial. Resolución de sistemas compatibles. Discusión de las soluciones de sistemas lineales dependientes de parámetros. Sistemas homogéneos. *(Los sistemas lineales tendrán como máximo cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas y dependerán a lo sumo de un parámetro).*
- Planteamiento y resolución de problemas cuya solución puede obtenerse a partir de un sistema lineal de, como máximo, tres ecuaciones con tres incógnitas.

GEOMETRÍA

- Vectores. Operaciones con vectores. Dependencia e independencia lineal. Bases. Coordenadas.
- Producto escalar: definición, propiedades e interpretación geométrica. Vectores unitarios, ortogonales y ortonormales. Módulo. Ángulo entre dos vectores. Proyección de un vector sobre otro.
- Producto vectorial: definición, propiedades e interpretación geométrica.
- Producto mixto de tres vectores: definición, propiedades e interpretación geométrica.
- Ecuaciones de rectas en el espacio. Ecuaciones de planos. Posición relativa de puntos, rectas y planos en el espacio. Distancia entre

puntos, rectas y planos. Haces de planos. Perpendicular común a dos rectas. Ángulos entre rectas y planos.
- Áreas de paralelogramos y triángulos. Volúmenes de prismas y tetraedros.
- Ecuación de la superficie esférica. Resolución de problemas.

Leganés, 17 de junio de 2013