Descargado de AdCyM Academia de Ciencias y Matemáticas www.adcym.es

	UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA LOS MAYORES DE 25 AÑOS AÑO **2019** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES : El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni simbólicas. **Las respuestas deben estar debidamente justificadas**.

PUNTUACIÓN: La puntuación total es de 10 puntos distribuidos conforme se indica en el enunciado de cada ejercicio.

TIEMPO: 1 hora y 30 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (2.5 puntos)

Dados el punto $P(0,1,1)$, el plano $\pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$,

se pide:

a) (1.5 puntos) Determinar la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

b) (1 punto) Hallar la distancia del punto P al plano π.

Ejercicio 2. (2.5 puntos)

Se considera la función $f(x) = \frac{2x}{x-3} = 2 + \frac{6}{x-3}$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la función derivada $f'(x)$.

b) (1 punto) Calcular la integral indefinida $\int f(x)dx$.

c) (0.75 puntos) Calcular las asíntotas de la función $f(x)$.

Ejercicio 3. (2.5 puntos)

Sea A una matriz cuadrada de orden 2. Se define una nueva matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} A$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz B sabiendo que el determinante de A es $|A| = -3$.

b) (1.5 puntos) Determinar la matriz A, sabiendo que $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. (2.5 puntos)

Un agricultor cultiva dos variedades de naranjas A y B. Terminada la campaña observa que el 60 % de los kilos recolectados corresponde a la variedad A y el 40 % a la variedad B. Aplicando determinados criterios preestablecidos, la calidad de las naranjas producidas ha sido catalogada como **óptima** en el 8 % de las naranjas de la variedad A y en el 12 % de las de la variedad B.

a) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje del total de las naranjas han sido catalogadas de **óptima** calidad?

b) (1.25 puntos) Entre las naranjas catalogadas de **óptima** calidad**,** ¿qué porcentaje corresponde a la variedad A?

Descargado de AdCyM Academia de Ciencias y Matemáticas www.adcym.es

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (2.5 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x & +3y & +z = 5 \\ 3x & +2y & -mz = 4 \\ 2x & +3y & +mz = 1, \end{cases}$

se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de los valores de m.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para $m = 0$.
c) (0.5 puntos) ¿Existe una solución del sistema que sea independiente de m?

Ejercicio 2. (2.5 puntos)

a) (1.25 puntos) Determínese el valor máximo de la función $f(x) = -x^2 + 4x + 5$, para los valores de x que satisfacen $0 \leq x \leq 3$.
b) (1.25 puntos) Una recta de pendiente $m = 4$ es tangente a la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$. Determínense las coordenadas del punto de tangencia y la ecuación de la recta.

Ejercicio 3. (2.5 puntos)

Dados el punto $A(4, -3, 2)$ y los vectores $\vec{u} = (0, 2, -1)$ y $\vec{v} = (1, -1, 3)$, se pide:

c) (1.25 puntos) Calcular el producto escalar y el producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
d) (1.25 puntos) Si B y C son los puntos tales que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, calcular el volumen del tetraedro formado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas.

Ejercicio 4. (2.5 puntos)

Se lanza tres veces un dado equilibrado. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener al menos un cinco en los tres lanzamientos.
b) (0.5 puntos) ¿Cuál es el número esperado de veces que el resultado será cinco?
c) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos cincos y que sean consecutivos?

Descargado de AdCyM Academia de Ciencias y Matemáticas www.adcym.es

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,4878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Tabla 1: Tabla de la distribución normal

Descargado de AdCyM Academia de Ciencias y Matemáticas www.adcym.es

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN
MATEMÁTICAS II

Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima 2.5 puntos)
Primer apartado: Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 1 punto, valorando resultados parciales.Segundo apartado 1 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima 2.5 puntos)
Apartado a): Si los posibles errores de cálculo no son graves y se acredita el conocimiento de la derivada de un cociente valorar el planteamiento con 0.5.
Apartado b): Planteamiento 0.5. Cálculos 0.5.
Apartado c): Si hacen el cálculo correcto de las asíntotas dar la puntuación máxima aunque no se haga referencia a la no existencia de asíntota oblicua.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima 2.5 puntos)
En el apartado a) valorar con 0.5 el planteamiento si se acredita el conocimiento de las propiedades aplicables a la resolución. Cálculos 0.5.
En el apartado b) 0.75 por el planteamiento y 0.75 los cálculos.
Valorar adecuadamente resultados parciales.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima 2.5 puntos)
De manera global dar un punto por asignar las probabilidades correctas que se derivan de los datos. 0.75 puntos por aplicar la regla de la probabilidad total, y lo mismo por la aplicación correcta del teorema de Bayes.

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima 2.5 puntos)
Apartado a): Obtener los valores de m que hay que discutir 0.5 puntos. Discusión 1 punto.
Apartado b): Penalizar con 0.25 puntos errores leves de cálculo.
Apartado c): Valórese cualquier consideración parcial correcta.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima 2.5 puntos)
Apartado a): Cálculo de la derivada y obtención de los puntos a valorar: 0.75 puntos. Resto: 0.5 puntos.
Apartado b): Valorar adecuadamente cualquier resultado parcial: Derivada, relación con la pendiente, ecuación de la recta…

Ejercicio 3. (Puntuación máxima 2.5 puntos)
Apartado a): 0.5 puntos el producto escalar. 0.75 puntos el producto vectorial.
Apartado b): Obtención de los puntos: 0.5 puntos. Volumen 0.75 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima 2.5 puntos)
Identificar la variable binomial 0.5 puntos independientemente de cómo se desarrolle el resto del ejercicio.
Si se obtienen bien las probabilidades pedidas, aunque no se identifique de manera explícita la variable binomial, se considerará bien resuelto.

Descargado de AdCyM Academia de Ciencias y Matemáticas www.adcym.es

Opción A

① a) El plano esta determinado por el punto $P(0,1,1)$ y los vectores $\overrightarrow{u}=(0,1,1)$ (director de la recta r) y $\overrightarrow{v}=(2,-1,1)$ (característico del plano π).

$$\left\{\begin{array}{lcc} x= & & 2\beta \\ y= & 1+\alpha & -\beta \\ z= & 1+\alpha & +\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x+y-z=0.}$$

b)

$$d(P,\pi)=\frac{|-1+1+2|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

---

② a)

$$f'(x)=\frac{-6}{(x-3)^2}$$

b)

$$\int\left(2+\frac{6}{x-3}\right)dx=2x+\ln(|x-3|)+C$$

c) Asíntotas: $x=3,\quad y=2.$

---

③ a)

$$|B|=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}|A|=(-2)(-3)=6.$$

b) La matriz inversa de $P=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$$A=P^{-1}B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

---

④

$$\begin{array}{cc} P(A)=0.6, & P(B)=0.4 \\ P(\text{Óptima}|A)=0.08 & P(\text{Óptima}|B)=0.12 \end{array}$$

a)

$$P(\text{Óptima})=0.08\cdot 0.6+0.12\cdot 0.4=0.096\ \boxed{9.6\%}$$

$$P(A|\text{Óptima})=\frac{P(\text{Óptima}|A)\cdot P(A)}{P(\text{Óptima})}=\frac{0.08\cdot 0.6}{0.096}=0.50\ \boxed{50\%}$$

Descargado de AdCyM Academia de Ciencias y Matemáticas www.adcym.es

Opción B

① a) El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -m \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix} = 5(m+1)$$

Luego si $m \neq -1$ el sistema es compatible determinado.
Si $m = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 6 & 6 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Como las dos últimas filas son proporcionales y las dos primeras linealmente independientes, el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada son iguales a 2. Es un sistema compatible indeterminado.

b) Para $m = 0$, la solución es $x = 2$, $y = -1$ y $z = 0$.

c) En la solución del apartado anterior es $z = 0$. Como el parámetro m solamente multiplica a la variable z, la solución anterior vale para cualquier m.

---

② a)

$$\begin{array}{ll} f(x) = -x^2 + 4x + 5 & \\ f'(x) = -2x + 4 = 0 & \Rightarrow x = 2 \\ f(0) = 5,\ f(3) = 8,\ f(2) = 9 & \boxed{\text{máximo: } f(2) = 9} \end{array}$$

b)

$$\begin{cases} y' = -2x + 2 = 4 & \Rightarrow x = -1 \\ \text{para } x = -1,\ \ y = 0 & \text{Punto de tangencia: } P(1,0) \\ \text{Ecuación de la recta:} & y = 4(x-1) \end{cases}$$

---

③ a)

$$\text{Producto vectorial: } \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (0,2,-1) \times (1,-1,3) = (5,-1,-2)$$

$$\text{Producto escalar: } \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (0,2,-1) \cdot (1,-1,3) = -5$$

b) Coordenadas del punto B: $(4,-3,2) + (0,2,-1) = (4,-1,1)$.
Coordenadas del punto C: $(4,-3,2) + (1,-1,3) = (5,-4,5)$.

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{19}{6}$$

---

④ a) La variable X que representa el número de veces que se obtiene un cinco es una variable binomial $B\left(3, \frac{1}{6}\right)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = 0.4213$$

b)

$$E[X] = 3 \cdot \frac{1}{6} = 0.5$$

c) Si $C \equiv$ sacar cinco,

$$P(CC\overline{C}) + P(\overline{C}CC) = 2\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{216}$$