Universidad Autónoma de Madrid	**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID** PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS Convocatoria **2019** **MATERIA: MATEMÁTICAS II**	**Modelo de examen**

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Elija **una** de las dos opciones propuestas, A o B. Lea con atención y detenimiento los enunciados de los ejercicios y responda de manera razonada a los puntos concretos que se preguntan solamente en la opción elegida.
Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
DURACIÓN: 90 minutos.
CALIFICACIÓN: Cada ejercicio tiene una puntuación máxima de 2,5 puntos, repartidos como indica cada uno de los apartados.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & \beta \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar el valor de α para el que la matriz A no admite inversa.
b) (1 punto) Discutir el rango de B según los valores de β.
c) (1 punto) Para $\beta = 0$, hallar la matriz inversa de B.

Ejercicio 2. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ a & \text{si } x = 3\,, \end{cases}$$

se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar el valor de a para que la función f sea continua.
b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ cuando $x = 0$.
c) (1 punto) Hallar los valores mínimo y máximo de f en el intervalo $[-2, 2]$ (es decir, $-2 \leq x \leq 2$).

Ejercicio 3. El plano π pasa por el punto $P_1(2,3,1)$ y es perpendicular al vector $\vec{\mathbf{u}} = (0,1,-1)$. La recta r pasa por el punto $P_2(7,5,9)$ y tiene dirección $\vec{\mathbf{v}} = (1,1,-1)$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar el producto escalar de los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$.
b) (1 punto) Hallar el producto vectorial de los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$.
c) (1 punto) Hallar el punto de la recta r que cae en el plano π.

Ejercicio 4. El peso del macho adulto de lobo ibérico sigue aproximadamente una variable aleatoria con distribución Normal de media 42.6 kg y desviación típica 4.9 kg. Un grupo de científicos captura, mide y luego suelta ejemplares de esta población. Se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que el primer lobo capturado pese más de 40 kg.
b) (1 punto) Hallar la probabilidad de que al menos uno de los dos primeros lobos capturados pese más de 40 kg.
c) (1 punto) Utilizar la aproximación Normal de la distribución Binomial para hallar la probabilidad de que de los 25 ejemplares capturados al menos 15 pesen más de 40 kg.

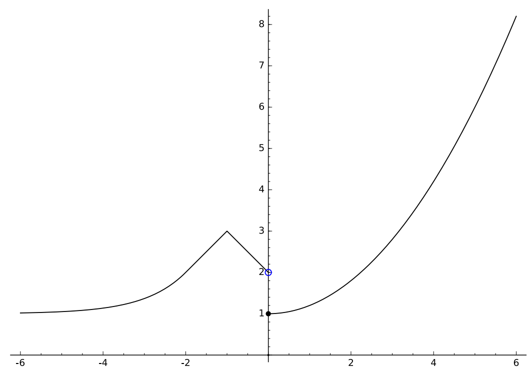
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (2.5 puntos).
Un indiano deja en herencia a sus tres sobrinos (Andrés, Benito, Carlos) sus tres estancias de 1600, 2000 y 2400 hectáreas con las siguientes especificaciones. Cada uno de ellos recibe en una de las estancias el doble de hectáreas que en cada una de las otras dos. Andrés recibe doble número de Ha en la de 1600, Benito en la de 2000 y Carlos en la de 2400. ¿Cuántas Ha recibe cada uno?

Ejercicio 2. El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $f(x)$ entre los puntos $x = -6$ y $x = 6$. Se pide:

a) (0.5 puntos) En qué punto x es discontinua la función.
b) (1 punto) En qué puntos x tiene la función máximos o mínimos locales y cuáles son los valores de estos.
c) (1 puntos) Para $x \geq 0$ la función $f(x)$ vale $1 + \frac{1}{5}x^2$; hallar

$$\int_1^2 f(x)dx.$$



Ejercicio 3. El plano π tiene ecuación $13x - 3\sqrt{2}y - 3z = 12$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto $P(1, \sqrt{2}, 3)$ al plano π.
b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a la recta r definida por las ecuaciones

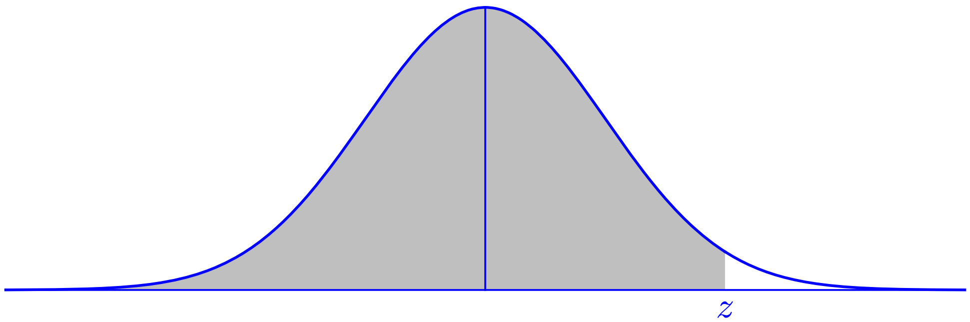
$$\frac{x-1}{-\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}}{1} = \frac{z+1}{\sqrt{2}}.$$

c) (1 punto) Hallar la distancia del punto $P(1, \sqrt{2}, 3)$ a la recta r.

Ejercicio 4. Una envasadora de legumbres recibe guisantes de tres productores A, B y C en proporciones del 20 %, 30 % y 50 % respectivamente. Los guisantes pueden tener un aspecto liso o rugoso y se sabe que según su procedencia A, B o C las proporciones de guisantes lisos son del 70 %, 60 % y 80 % respectivamente. Una vez recibidos, los guisantes se mezclan de forma homogénea en el almacén. Se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la proporción de guisantes lisos en el almacén.
b) (1 punto) Si se extrae al azar un guisante del almacén y resulta que es liso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda del productor A?
c) (1 punto) Si se extraen al azar dos guisantes del almacén ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea liso?

Tabla de la distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0.45) = 0.6736$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas. Cualquier argumento válido o razonamiento que conduzca a la solución del ejercicio será valorado con la puntuación correspondiente, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Valor correcto: 0.25 puntos
b) Procedimiento: 0.5 puntos. Discusión del rango: 0.25 puntos cada caso ($\beta = -6$ o $\neq -6$). Debe indicarse de alguna forma por qué el rango es 2 si $\beta = -6$.
c) Procedimiento: 0.5 puntos; cálculos 0.5 puntos.

Ejercicio 2.

a) Si el resultado es correcto, conceder los 0.5 puntos. Si se indica la idea correcta pero se obtiene un valor erróneo: 0.25 puntos.
b) Si se conoce la fórmula correcta: 0.5 puntos. Por cada uno de los valores $f(0)$ y $f'(0)$ correctos añadir 0.25 puntos.
c) Idea correcta 0.5 puntos. Por valores del máximo y mínimo correctos añadir 0.25 puntos cada uno. Si deriva, observa que la derivada no se anula y dice que no hay extremos: 0 puntos.

Ejercicio 3.

a) Procedimiento: 0.25 puntos. Cálculo correcto: 0.25 puntos.
b) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.
c) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.

Ejercicio 4.

a) Procedimiento: 0.25 puntos. Valor correto: 0.25 puntos.
b) Si se observa que se trata de una binomial: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.
c) Si se observa que es una binomial: 0.25 puntos. Si se aproxima por la Normal con parámetros correctos: 0.5 puntos. Cálculo final del valor: 0.25 puntos. No es necesario utilizar la llamada «corrección por continuidad».

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

Asignar incógnitas para escribir un sistema: 0.5 puntos. Escribir un sistema lineal correcto: 1 punto. Resolver el sistema correctamente: 0.5 puntos. Utilizar las soluciones obtenidas para contestar lo preguntado: 0.5 puntos.

Ejercicio 2.

a) Justificación: 0.25 puntos. Resultado: 0.25 puntos.
b) Por cada uno de los dos extremos relativos: 0.5 puntos repartidos en 0.25 por su justificación y 0.25 puntos por el resultado.
c) Integral planteada correctamente: 0.25 puntos. Primitiva correcta: 0.50 puntos. Aplicación correcta de la regla de Barrow: 0.25 puntos.

Ejercicio 3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.

Ejercicio 4.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.
c) Observar que se trata de una binomial: 0.5 puntos Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

Modelo de examen

MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES
OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) No admite inversa si $\det A = 0$. Como $\det A = 6 - 2\alpha$, la matriz A no adminte inversa para $\alpha = 3$.

b) Por medio de operaciones de filas se obtiene la siguiente sequencia de matrices con el mismo rango

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & \beta \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & \beta \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \beta+6 \end{pmatrix}$$

por tanto, si $\beta \neq -6$ el rango es 3; si $\beta = -6$ el rango es 2.

c) Se admitirá cualquier método de cálculo de la inversa. Para $\beta = 0$ la matriz inversa es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2

Si $x \neq 3$, se observa que $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$.

a) $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$, por tanto la función es continua en $x = 3$ cuando $\boxed{a = 6}$.

b) Si $x \neq 3$, $f'(x) = 1$ por tanto $f'(0) = 1$ $f(0) = 3$. La recta tangente en $x = 0$ será $y - 3 = 1(x - 0)$, es decir $\boxed{y = x + 3}$.

c) Dado que $f'(x) = 1$, la función es creciente en $[-2, 2]$ por tanto el mínimo se alcanza en $x = -2$ y vale 1 y el máximo se alcanza en $x = 2$ y vale 5.

Ejercicio 3

a) $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = (0, 1, -1) \cdot (1, 1, -1) = 2$.

b)

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = -\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Es decir, $\boxed{\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = (0, -1, -1)}$.

c) La ecuación continua de r es $x - 7 = y - 5 = -(z - 9)$. La ecuación del plano es $y - z = 2$. Por tanto, el punto de corte será la solución del sistema

$$\begin{cases} x - 7 = -(z-9) \\ y - 5 = -(z-9) \\ y - z = 2 \end{cases} \quad \text{es decir,} \quad \begin{cases} x + 7 = 16 \\ y + z = 14 \\ y - z = 2 \end{cases}.$$

Por tanto, el punto de corte es $\boxed{(10, 8, 6)}$.

Ejercicio 4

La variable aleatoria X (peso del lobo), tiene una distribución $N(42.6, 4.9)$.

a) Si Z representa una variable $N(0,1)$ entonces $P(X > 40) = P(Z > \dfrac{40 - 42.6}{4.9}) = P(Z > -0.53) = 0.7$.

b) Si N es el número de lobos, entre los dos primeros, que pesan más de 40 kg, N es una variable aleatoria con distribución binomial Bin$(2, 0.7)$, por tanto

$$P(N \geq 1) = P(N = 1) + P(N = 2) = \binom{2}{1}(0.7)\cdot(0.3) + \binom{2}{2}(0.7)^2 = 2 \cdot 0.21 + 0.49 = 0.91.$$

c) Si ahora N es el número de lobos, de los 25 capturados, que pesan más de 40 kg: $N \sim$ Bin$(25, 0.7)$ por tanto, es aproximadamente normal de media $25 \cdot 0.7 = 17.5$ y desviación típica $\sqrt{25 \cdot 0.7 \cdot 0.3} = 2.3$. Entonces

$$P(N \geq 15) = P(Z > \frac{14.5 - 17.5}{2.3}) = P(Z > -1.3) = 0.9.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1

Andrés recibe $2X$ Ha de la estancia de 1600 Ha, X de la de 2000 y X de la de 2400. Benito recibe Y Ha tanto de la hacienda con 1600 como de la de 2400 Ha y $2Y$ de la de 2000. Finalmente, Carlos recibe Z Ha tanto de la de 1600 como de la de 2000 pero recibe $2Z$ de la de 2400. Entonces X, Y, Z verifican las ecuaciones

$$\begin{array}{l} 2X + Y + Z = 1600 \\ X + 2Y + Z = 2000 \\ X + Y + 2Z = 2400 \end{array}$$

La solución de este sistema de ecuaciones da $X = 100$, $Y = 500$, $Z = 900$ de forma que Andrés recibe 400 Ha, Benito 2000 Ha y Carlos 3600 Ha.

Ejercicio 2

a) Según la gráfica en la parte representada el único punto de discontinuidad ocurre en $x = 0$ en el que el límite por la derecha y el límite por la izquierda de la función no coinciden.

b) La función tiene un máximo local en $x = -1$; su valor es $f(-1) = 3$. Tiene un mínimo local en $x = 0$ con valor $f(0) = 1$.

c) Se pide calcular

$$\int_1^2 (1 + \frac{1}{5}x^2)dx = (x + \frac{1}{15}x^3)\Big|_1^2 = (2 + \frac{1}{15}2^3) - (1 + \frac{1}{15}1^3) = 1 + \frac{7}{15} = \frac{22}{15}.$$

Ejercicio 3

a) La distancia pedida es

$$\frac{|13 \cdot 1 - 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 3 - 12|}{\sqrt{13^2 + (-3\sqrt{2})^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{7}.$$

b) El plano buscado contiene las direcciones $(-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$ y $(13, -3\sqrt{2}, -3)$ y el punto $(1, \sqrt{2}, -1)$, por tanto su ecuación es

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-\sqrt{2} & x+1 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 13 & -3\sqrt{2} & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

o bien $3x + 10\sqrt{2}y - 7z = 30$.

c) El vector que une el punto P con el punto $(1, \sqrt{2}, -1)$ de la recta es $(0, 0, 4)$. La distancia del punto a la recta se puede calcular mediante

$$\frac{|(-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}) \times (0, 0, 4)|}{|(-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})|} = \frac{|(4, 4\sqrt{2}, 0)|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

Ejercicio 4

a) Si se denota por L el suceso «al extraer al azar un guisante del almacén, este es liso», lo que se pide es la probabilidad $P(L)$. Por medio de la regla de la probabilidad total se calcula

$$P(L) = P(L|A)P(A) + P(L|B)P(B) + P(L|C)P(C) = 0.7 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.3 + 0.8 \cdot 0.5 = 0.72.$$

b)

$$P(A|L) = \frac{P(L|A)P(A)}{P(L)} = \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.72} = 0.19.$$

c) El número de lisos entre los dos extraidos es binomial:

$$P(N \geq 1) = P(N = 1) + P(N = 2) = 2 \cdot 0.72 \cdot 0.28 + (0.72)^2 = 0.92.$$